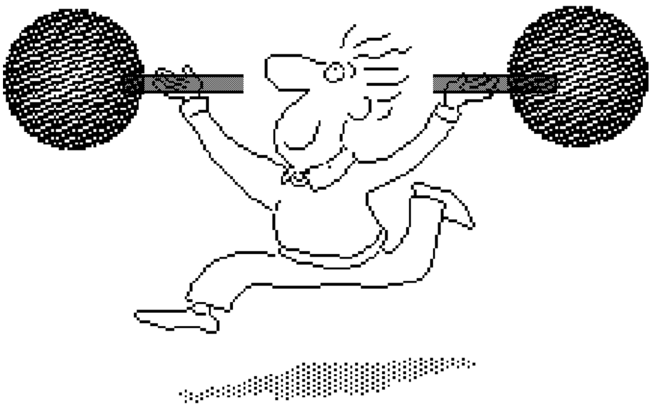
2 3° ESO

A la izquierda, nadie me quiere,
a la derecha, ¡quién me viere!
De un lado ni entro ni salgo
y del otro mucho valgo

¿Qué es?



Potencias y raices

ÍNDICE:

MATRÍCULAS NUEVAS EN EUROPA

LA NUEVA PLACA INCLUYE LA "E" DE ESPAÑA Y NO LLEVA DISTINTIVOS PROVINCIALES

Desde el 18 de septiembre de 2001, se están colocando en España las nuevas placas de matrícula. Son del llamado modelo 'europeo', su tamaño (52x11 cm.) es dos centímetros más largo, no incluye el distintivo provincial sino la "E" de España sobre la bandera de la Unión Europea más una combinación de cuatro números (de 0000 a 9999) y tres letras: comienza por BBB y termina en ZZZ y excluye las vocales (para evitar combinaciones malsonantes y acrósticos significativos) y la LL, CH (incompatibles con el diseño de la placa, que no admite cuatro caracteres en el último grupo) y la Ñ y Q, por confundirse con la N y O y el número 0.

La puesta en marcha de las 'nuevas' matrículas casi coincide con el centenario de la primera matriculación en España, en Palma de Mallorca el 31 de octubre de 1900: un Clement de José Sureda, de Santa Catalina. Ese año se matricularon otros tres vehículos: en Cáceres; otro, en Palma; y el tercero, en Salamanca.

Desde entonces, el parque de vehículos no ha parado de crecer. En 1901 se matriculan 47 automóviles (36 en San Sebastián). Ni Madrid ni Barcelona matricularon vehículos hasta 1907, año en que el parque ascendía a 2.369 unidades.

Revista Tráfico (DGT), CEA y MiCoche

FABRICACIÓN DE VEHÍCULOS AUTOMÓVILES Y BICICLETAS. UNIDADES.

Instituto Nacional de Estadística

	Automóviles sin motocicletas		
	TOTAL	Turismos y todoterrenos Total	Furgonetas y camiones (1)
	Miles de unidades		
2005	2.682,9	2.177,5	505,4
2006	2.714,9	2.189,0	525,9
2007	2.899,2	2.361,2	538,0
2008	2.549,9	2.058,1	491,9
2009	2.172,4	1.833,2	339,2
2010	2.393,9	1.952,5	441,4
2011	2.374,1	1.884,4	489,6
2012	1.907,6	1.515,8	391,8
2013	2.166,6	1.755,4	411,2
2014	2.405,6	1.874,7	530,9
2015	2.742,3	2.217,7	524,6

CUESTIONES (EXPLICA TUS RESULTADOS)

1. ¿Hasta cuántos coches se podrían matricular con este nuevo sistema de numeración?

2. Al ritmo que ves en la tabla de los últimos diez años, ¿durante cuánto tiempo se podría mantener útil el sistema? -haz una media de la producción anual-. Explica tus respuestas.

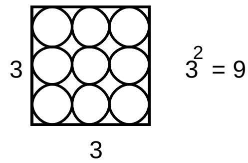
3. El 1 de septiembre de 2016 se matriculó un coche con esta matrícula:

¿Cuántos coches se han matriculado, entonces, desde el 2001, año en que empezó este modelo, hasta esta?

1. POTENCIACIÓN

CUADRADO

Se llama cuadrado de un número al producto de dicho número por sí mismo.
Es el área del cuadrado que lo tiene de lado. Por eso se llama cuadrado.

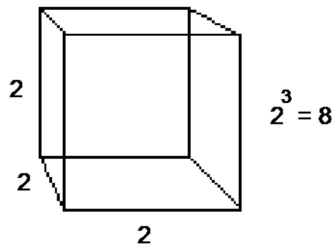


• Mi habitación tiene 4 m de lado. ¿Cuánto tiene de superficie?

• Calcula: $(-6)^2 =$

CUBO (ILUSTRARLO CON DADOS)

Se llama cubo de un número al producto de dicho número por sí mismo tres veces.
Es el volumen del cubo que lo tiene de lado. Por eso se llama cubo



• ¿Cuál es el volumen del cubo del dibujo si tiene 2 dm de lado?

• Calcula: $(-3)^3 =$

• Un depósito de agua tiene forma de cubo con 8 m de lado. ¿Cuántos litros caben?

POTENCIAS

Una potencia es el producto repetido de un número por sí mismo varias veces.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	8	$3^4 =$		$(-5)^2 =$	
$10^5 =$		$\left(\frac{5}{3}\right)^2 =$		$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 =$	

A los dos números que intervienen en la potencia se les llama:

a^b | a: base
b: exponente

La potencia tiene prioridad sobre el resto de operaciones. Es decir, que se hace antes que la suma/resta y producto/división.

Por ejemplo,

- $3 \cdot 10^2 =$
- $4 + 2 \cdot 5^2 =$
- $(2 + 3)^2 \cdot 2 + 7 =$

PROPIEDADES

1ª	$2^3 \cdot 2^4 =$	$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 =$	$2^{3+4} = 2^7$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2ª	$\dfrac{4^5}{4^2} =$			
3ª	$\left(5^2\right)^3 =$	$5^{2\cdot3} = 5^6$		
4ª	$(2 \cdot 3)^3 =$	$(2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3)$		
5ª	$(\frac{2}{3})^3 =$			
6ª	$5^1 =$			

Según las propiedades anteriores simplifica lo siguiente:

$3^2 \cdot 3^5 =$	$\dfrac{5^7}{5^5}$	$\left(2^4\right)^3$	b^1
c^0	3^{-2}	$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$	

Simplifica utilizando en cada paso una sola propiedad.

$$\frac{\left(a^2\right)^3 \cdot a}{a^7} = \frac{a^{2\cdot3} \cdot a}{a^7} = \frac{a^6 \cdot a}{a^7} =$$

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

De la siguiente tabla se consigue dar un valor a las potencias exponente entero:

7ª	$3^0 = 3^{2-2} = \dfrac{3^2}{3^2} = 1$			
8ª	$2^{-3} = \dfrac{2^0}{2^3} = \text{—}$			
9ª	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 =$			

Vamos a simplificar:

3^{-2}	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$	

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CON POTENCIAS

En una fracción de potencias se simplifican las potencias del numerador y del denominador que tengan la misma base restando los exponentes.

$$\frac{3^4 \cdot 5^3}{3^1 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{3^{\cancel{4}3} \cdot 5^{\cancel{3}2}}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{5}^2 \cdot 7} = \frac{3^3 \cdot 5}{7}$$

• Simplifica: $\dfrac{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11}{7 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5^2}$

Si una potencia tiene exponente negativo pasa del numerador al denominador (o al revés) cambiando de signo. Por ejemplo en el siguiente ejemplo. Acaba la simplificación

$$\frac{3^2 \cdot 5^{-3}}{3^{-1} \cdot 5^2} = \frac{3^2 \cdot 3^1}{5^2 \cdot 5^3} =$$

Para simplificar en una fracción con potencias:	$\dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2}}{2^{-3} \cdot 3^4 \cdot 5^3} =$
1° Se pasan todos a exponente positivo	$= \dfrac{2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 5^3 \cdot 5^2} =$
2° Se simplifican el numerador y el denominador por separado	$= \dfrac{2^5 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 5^5} =$
3° Se resta el exponente menor al mayor	$= \dfrac{2^5 \cdot \cancel{3}^2}{3^{\cancel{4}2} \cdot 5^5} =$
Resultado final simplificado	$= \dfrac{2^5}{3^2 \cdot 5^5} =$

Simplifica tú ahora la siguiente expresión:

$$\frac{2^2 \bullet 3^{-4} \bullet 5^2}{2^{-3} \bullet 3 \bullet 5^{-1}}$$

2. NOTACIÓN CIENTÍFICA

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

El n° de cifras con valor exacto que utilizamos para dar un resultado se llaman cifras significativas. Cuando decimos que mi pueblo tiene 23 0000 habitantes, no queremos decir que

tenga 23 mil habitantes justos sino que son 23 000 aproximadamente. Sólo le atribuimos valor a las dos pirmeras cifras en este caso. Es decir, estaríamos dando 2 cifras significativas.

Medida	**Valor**	**Cifras significativas utilizadas**
¿Cuánto mides?	1,63 m	3
¿Cuánto pesas?	58 Kg	
¿Qué distancia hay de Cáceres a tu pueblo?	12 Km	
¿Qué temperatura máxima hizo ayer?	13°C	
¿Cuántos habs tiene Cáceres?	74 mil	
Grosor del cabello	0’00023 m	
Grosor hoja papel	0’0217 cm	
Habs España	38,6 millones	

El resultado de un problema basta darlo con 2 ó 3 cifras significativas.

POTENCIAS DE 10

Para escribir abreviadamente números muy grandes se utilizan potencias de 10.

100 = 10^2	1000 = 10^3	10000 =
100000 =	1000000 =	
300 =	5000 =	70000 =
–300000 =	–3000000 =	

• 10^4 = 10000. La unidad seguida de 4 ceros. Correr la coma 4 lugares a la derecha.

Algunas cifras muy grandes de nuestro mundo que se escriben más cómodamente con potencias de 10 son las siguientes:

Dato	**Valor**	**Potencias de 10**
Ecuador	40000 Km	$4 \cdot 10^4$ Km
Distancia Tierra–Sol	150 000 000 Km	$1'5 \cdot 10^8$ Km
Habitantes Tierra	5 800 000 000	$5'8 \cdot 10$
Habitantes España	38 500 000	$3'85 \cdot$

También sirven para escribir números muy pequeños.

$0'1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ dècima	$0'01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ centèsima
0’001 =	0,0001 =
0’00001 =	0’000001 =
0’003 =	–0’00008 =
–0’00000007 =	–0’0009 =

- 10^{-4} = 0,0001. La unidad con 4 decimales. Correr la coma 4 lugares a la izquierda.

Pero también sirven para la escritura de números pequeños,

Dato	**Valor**	**Potencias de 10**
Grosor hoja papel	0’004 cm	$4 \cdot 10^{-3}$ cm
Tamaño virus	0’000 000 032 m	3’2 · 10
Grosor cabello	0’000285 m	2’85 ·

Las potencias de 10 más importantes tienen los siguientes nombres:

10^3	kilo	10^6	mega	10^9	giga
10^{-3}	mili	10^{-6}	micro	10^{-9}	nano

• Un hombre pesa $75 \cdot 10^3$ gramos. Es decir, pesa 75 Kilogramos.
• El tamaño de una virus es de $3 \cdot 10^{-9}$ m. Es decir, mide
• Mi ordenador tiene $2 \cdot 10^9$ bytes de memoria. Es decir, tiene
• Una gota de agua tien $2 \cdot 10^{-3}$ litros de volumen. Es decir, tiene
A esta forma de escribir una cifra se le llama notación científica de un número.
También se dice escribirlo en potencias de 10.

Tiene dos partes:

1’53·	10^8
cifras significativas	**potencia de 10**

Para escribir un número en notación científica hay que seguir los pasos siguientes**:**

Número en forma decimal	1 230 000
1. Poner las cifras diferentes de cero o significativas:	123
2. Colocar la coma después de la 1ª cifra	1’23
3. Ajustar la potencia de 10	$1'23 \cdot 10^6$

Escribe los siguientes números en potencias de 10:

Número	**Potencia 10**	**Número**	**Potencia 10**
1230000		230000	
13000		0’0032	
0’00032		0,0000123	
–5000		–0’0002	

MUY IMPORTANTE:
Las cifras significativas **sólo** llevarán **1 cifra entera**

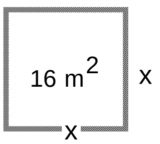
Escribe correctamente los siguientes números en **potencias de 10:**

Número		**Potencia 10**	**Número**		**Potencia 10**
103000			$23\cdot10^4$	$2'3\cdot10\cdot10^4$	$2'3\cdot10^5$
$10'56\cdot10^4$			$0'0032\cdot10^6$		
0’00032			$12'3\cdot10^{-4}$		
–5100			–0’000201		

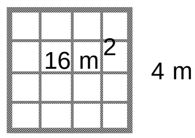
3. RAÍCES Y RADICALES

RAÍZ CUADRADA

La raíz cuadrada es la operación inversa del cuadrado:



$\rightarrow \sqrt{16} = 4 \rightarrow$



Conocida la superficie de un cuadrado

…

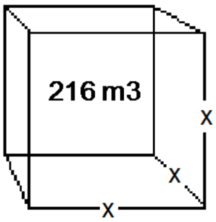
Calculo el lado

• Para un cultivo necesito 36 m^2 de superficie. ¿De qué dimensiones cuadradas tengo que hacer la finca?

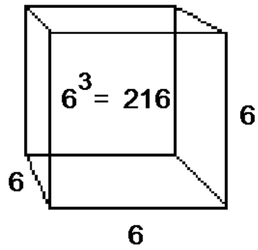
• ¿Qué es un m^2?

RAÍZ CÚBICA

La raíz cúbica es la operación inversa del cubo:



$\rightarrow \sqrt[3]{216} = 6 \rightarrow$



Conocido el volumen de un cubo … Podemos hallar el lado

• ¿Qué es un litro como volumen?

• Para hacer un depósito de agua de 125 litros. ¿Qué dimensiones cúbicas he de darle?

• ¿Qué es un m^3?

• El signo √ procede de la inicial de la palabra **r**aíz. Apareció por primera vez en Alemania en 1525. Al principio se escribía con todas las letras **raíz de 5**. Luego pasó a escribirse sólo **r5**. Por último se deformó la **r** para abarcar a todo el número pasando a ser $\sqrt{\mathbf{5}}$

RADICALES

Es la operación inversa de la potenciación.

$\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ **= b** si $b^n = a$	a: Radicando n: Indice de la raíz

Radical	Valor	Explicación	Radical	Valor	Explicación
$\sqrt[3]{8}$ =	2	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{64}$		
$\sqrt[3]{27}$			$\sqrt[5]{32}$		
$\sqrt[3]{125}$			$\sqrt[3]{0'001}$		
$\sqrt[2]{0{,}04}$			$\sqrt{0{,}01}$		

ESTIMACIÓN DE RADICALES

Llamaremos **estimar una raíz** a dar una aproximación de ella.

Por ejemplo, $\sqrt{178} \approx 13'3$. Raíz de 178 aproximadamente es 13'3.

TABLA DE CUADRADOS Y CUBROS:

Según la tabla estima el valor de las siguientes raíces —te puedes ayudar de la calculadora—.

- $\sqrt{13} \approx$
- $\sqrt{34} \approx$
- $\sqrt{65} \approx$
- $\sqrt{172} \approx$
- $\sqrt{348} \approx$
- $\sqrt[3]{49} \approx$
- $\sqrt[3]{412} \approx$

Cuadrados

n	n^2	n	n^2
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

Cubos

n	n^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

NÚMERO DE RAÍCES. RADICALES EQUIVALENTES

Si el índice es par: radicando positivo, cero, negativo.

Si el índice es impar:

EQUIVALENCIA DE RADICALES

Se obtiene una raíz equivalente multiplicando por el mismo número al índice de la raíz que al exponente del radicando.

Lógicamente también se obtiene otra equivalente al dividir por el mismo valor.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m/p]{a^{n/p}}$$

Simplifica los siguientes radicales:

$$\sqrt[6]{2^3}\ ;\ \sqrt[12]{5^4}\ ;\ \sqrt[18]{a^{12}}$$

Reduce a índice común y ordena los radicales:

$$\sqrt[2]{2}\ ;\ \sqrt[4]{2^3}\ ;\ \sqrt[6]{2^5}$$

Completa la siguiente tabla para que sean ciertas las igualdades. En las primeras se indica la posición para ayudar. En el resto averígualo tú:

$\sqrt{2} = \sqrt[[\ \ ]]{2^3}$	$\sqrt[2]{5} = \sqrt[[\ \ ]]{25}$	$\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[10]{2^{[\ \ ]}}$	$\sqrt[10]{2^4} = \sqrt[5]{2}$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Suma: No opera bien con la suma

Por un lado, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	Sin embargo, $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
Luego, la raíz de una suma **no** es igual a la suma de las raíces $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$	

Es claro que: $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (4 + 5 - 7)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

• Simplifica la expresión agrupando los radicales idénticos:

$5\sqrt{3} - \sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} =$

PRODUCTO: SI OPERA BIEN CON EL PRODUCTO

De una parte, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$	También, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$
Luego, la raíz de un producto **es igual** al producto de las raíces $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	

• Simplifica:

$\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} =$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

DIVISIÓN: SI OPERA BIEN CON LA DIVISIÓN:

Por un lado, $\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$	También, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$
Luego, la raíz de un cociente **es igual** al cociente de las raíces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

• Simplifica:

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

$\frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$

$\frac{10\sqrt[3]{40}}{2\sqrt[3]{5}} =$

POTENCIAS: OPERA BIEN CON LAS POTENCIAS

El exponente de una raíz pasa multiplicando al exponente del radicando.

$$\left(\sqrt{a^n}\right)^m = \sqrt{a^{n\cdot m}}$$

• Simplifica:

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 =$

$\left(\sqrt{3}\right)^4 =$

$\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^2 =$

INTRODUCIR NÚMEROS EN UN RADICAL

$2\sqrt{3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{12}$

$2\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$

EXTRAER FACTORES

Para simplificar una raíz se pueden extraer fuera factores que sean raíces enteras.

Para ello procederemos a buscar dentro de la descomposición factorial una potencia igual al índice de la raíz.

$\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{810} = \sqrt[4]{81\cdot 10} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10} = 3\sqrt[4]{10}$

Raíz	Descom	Simplificación	Final
$\sqrt[3]{40} =$	$\sqrt[3]{2^3\cdot 5}$	$\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}$	$2\cdot\sqrt[3]{5}$
$\sqrt{80} =$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5}$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5} = \sqrt[2]{2^4}\cdot\sqrt[2]{5}$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5} = 4\cdot\sqrt[2]{5}$
$\sqrt[2]{160} =$			
$\sqrt[3]{128} =$			
$\sqrt{405} =$			
$\sqrt[3]{600} =$			

Hay que separar los factores que tengan de exponente un múltiplo del índice. De lo contrario no tienen potencia suficiente para salir de la raíz.

SIMPLIFICACIÓN DE SUMAS DE RADICALES IDÉNTICOS:

Podemos pues simplificar sumas que contengan radicales idénticos agrupándolos.

Según esto simplifica extrayendo previamente los factores que sea posible:

$\sqrt{8} + \sqrt{50} + \sqrt{18} =$

RADICALES ALGEBRAICOS

DEFINICIÓN

Son radicales que contienen expresiones algebraicas.

OPERATIVIDAD

Similar a la de los radicales numéricos.

Ejemplos

$3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} =$

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} =$

$\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} =$

$\sqrt{x^2 \cdot y} =$

$\sqrt{\dfrac{x^3}{y^2}} =$

$\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^3 =$

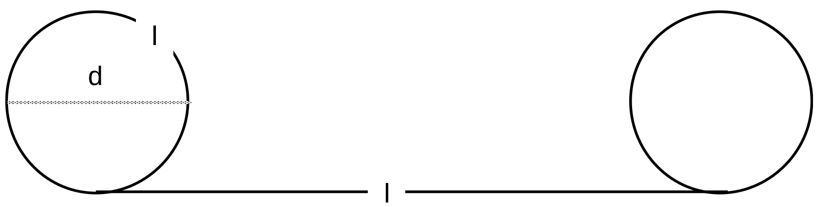
$\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^5}} =$

Simplificar : $\sqrt[2]{x^6} =$

Racionalizar : $\dfrac{7}{\sqrt{3}}, \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, \dfrac{5}{1-\sqrt{2}}, \dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

4. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

¿Por qué hay números que se representan con letras?
¿Qué es el número π?
¿Cómo se llama a los números que no tienen parte decimal finita o periódica?
¿Qué números son irracionales?
• El número π es la proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.



$\dfrac{l}{d} = \pi$

Tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Estas son sus primeras 20 cifras decimales: π = 3’14159265358979323846…

Esto se consigue aproximando la circunferencia por el perímetro de polígonos regulares del mismo radio.

Los judíos (a.C.) utilizaban $\pi = 3$ y los babilonios sabían que $\dfrac{21}{7} < \pi < \dfrac{22}{7}$

La mejor aproximación, entre los griegos, fue la dada por Arquímedes, el cual dijo que estaba comprendido entre los números $\dfrac{22}{7}$ y $\dfrac{223}{71}$

En la India utilizaron las fracciones $\frac{49}{16}$ y $\frac{3927}{1250}$.

Un matemático en el año 1600 encontró la fracción $\frac{355}{113}$ como aproximación de π.

La diagonal del cuadrado

• También les ocurre a las raíces no enteras de números enteros: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; …etc.

Por ejemplo al número $\sqrt{2}$ = 1'414213562…le pasa lo mismo que a π que tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Mostrar las construcciones de las raíces.

Forma decimal

• Una forma sencilla de localizar un número irracional sería ir poniendo cifras decimales no periódicas: 5,101001000100001…

CUADRO COMPARATIVO:

TIPOS DE NÚMEROS				
	N	**Z**	**Q**	**I**
Signo	Positivos	Positivos y negativos	Positivos y negativos	Positivos y negativos
Parte decimal	No tienen	No tienen	Pueden tener	Tienen
Nº de decimales			Finitos o periódicos	Infinitos y no periódicos

Sucesivas ampliaciones de los números

$N \subset Z \subset Q \subset R$